1. Zbadaj zbieżność szeregów i w przypadku szergów zbieżnych, oblicz ich sumy:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},\quad b*)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{e}\right)^n,\quad d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n),\quad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n},$
$f)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} 14\cdot(0,3)^n,\quad g*)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n}),\quad h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{7^n}+\frac{5}{9^n}\right).$

2. Zmień ułamki okresowe na ułamki zwykłe:

$$a)\ 1,(1),\quad b)\ 2,(15),\quad c)\ 0,3(13).$$

3. Uzasadnić zbieżność lub rozbieżność podanych szeregów liczbowych:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}},\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}},\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1},\quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n},\quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1},$$

4. Zbadać zbieżność podanych szeregów:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1},\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1},\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2-2},\quad d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1},\quad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+3},\quad f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n},$
$g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n},\quad h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n},\quad i)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n},\quad j)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n},\quad k)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n},\quad l)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n},$
$m)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+2}{2n^3+5},\quad n)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)},\quad o)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}},\quad p)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin^2 n}{n^2+1},\quad r)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}},\quad s)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{2n^3-1},$
$t)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}},\quad w)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2\frac{1}{\sqrt{n}}.$

5. Zbadać zbieżność szeregów:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!},\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}},\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2},\quad d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2},\quad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-\frac{1}{3})^n,\quad f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\frac{1}{n})^n,$
$g)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{8^n\cdot(n!)^2},\quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{n-n^2}.$

6. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}},\quad b)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n},\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}},\quad d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},\quad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4},\quad f)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1},$
$g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} n}{n^2+1},\quad h)\ \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$

7. Zbadać zbieżność szeregów i określić rodzaj zbieżności:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},\quad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},\quad c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{1+n}{n^2+4n+3}\quad d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{n!},\quad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot n(\arcsin\frac{1}{n})^n,$
$f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{n^4}{8^n},$

8. Zbadać zbieżność szeregów, dla szeregów naprzemiennych lub o wyrazach dowolnych określić rodzaj zbieżności:

$1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}},\quad 2)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n},\quad 3)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{n}{2n+1}),\quad 4)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} n)^n}{\pi^n},$
$5)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} n!}{\pi},\quad 6)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{3^n},\quad 7)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n[1+(\frac{1}{10})^n],\quad 8)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\frac{n}{2n-1})^n,$
$9)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n}(\frac{3n+2}{3n-2})^{3n^2},\quad 10)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n},\quad 11)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} (\frac{\ln n}{n})^n,\quad 12)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n(\frac{\ln n}{n})^n,$
$13)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{7^n}{n!},\quad 14)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+2+3+...+n}},\quad 15)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot(\frac{8}{9})^n,\quad 16)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{1}{\sqrt{3n+1}},$
$17)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\sqrt[n]{1+2^n},\quad 18)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}},\quad 19)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{3n^2+n+7},\quad 20)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}n\sin\frac{1}{n},$
$21)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3^n)}{3^n},\quad 22)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{1+n^7},\quad 23)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!},\quad 24)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\frac{2n+1}{3n+1})^n,$

Literatura:

K.T. Jankowscy **Zadania z matematyki wyższej**

M.Gewert, Z.Skoczylas **Analiza matematyczna 2**