LICZBY ZESPOLONE

Old saying: "God created the complex numbers; anything less is the work of man."

Zad.1 Wyznaczyć postać algebraiczną (kanoniczną) podanych liczb zespolonych (tzn. $z = x + yi$). Następnie podać $Rez, Imz, |z|, \bar{z}$.

$$a)\ z = (-2+3i)+(7-8i),\quad b)\ z = (\sqrt{2}+i)(3-\sqrt{3}i),$$
$$c)\ z = \tfrac{3}{4-i},\quad d)\ z = \tfrac{2-3i}{5+4i},$$
$$e)\ z = \tfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}},\quad f)\ z = (1+i)^2\left(\tfrac{4}{1-i}+\tfrac{2-i}{1+i}\right).$$

Zad.2 Zapisać podane liczby w postaci algebraicznej ($z = x + yi$):

$$a)\ z = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}),\ b)\ z = 5\sqrt{2}(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi),$$
$$c)\ z = 3(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi).$$

Zad.3 Przedstawić podane liczby w postaci trygonometrycznej i przedstawić interpretację geometryczną:

$$a)\ z = 3,\ b)\ z = -3i,\ c)\ z = 1+i,\ d)\ z = -1-i,$$
$$e)\ z = -\sqrt{3}+i,\ f)\ z = -\sqrt{6}-\sqrt{2}i,\ g)\ z = \sqrt{2}-\sqrt{6}i$$

Zad.4 Obliczyć i przedstawić wynik w postaci algebraicznej ($z = x + yi$):

$$a)\ (\sqrt{3}-i)^{24},\quad b)\ \left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\right)^9,$$
$$c)\ \left(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{26},\quad d)\ (-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i)^{31},$$
$$e)\ (\tfrac{\sqrt{3}}{2}+i\tfrac{1}{2})^{100},\quad f)\ \left[\tfrac{(1-i\sqrt{3})i}{(1+i)(-1-i)}\right]^{400}$$
$$g)\ (\tfrac{1-i}{\sqrt{3}+i})^6,\quad h)\ \tfrac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}.$$

Zad.5 Obliczyć:

$$a)\ \sqrt[3]{-1},\quad b)\ \sqrt[3]{-i},\quad c)\ \sqrt[4]{16},$$
$$d)\ \sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i},\quad e)\ \sqrt{-6+8i},\quad f)\ \sqrt{8+4\sqrt{5}i},$$
$$g)\ \sqrt[4]{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i)^3},\quad h)\ \sqrt[6]{-27}.$$

Zad.6 Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór liczb $z = x + yi$ spełniających podane warunki:

$a)$ $Re z = Im z$, $b)$ $Re(z(1-i)) = 2$,

$c)$ $|z+1-2i| = 3$, $d)$ $1 < |z+i| \leqslant 2$,

$e)$ $Im[(1+2i)z - 3i] < 0$, $f)$ $|1+iz| \leqslant Re[(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^{12}]$,

$g)$ $\frac{\pi}{6} \leqslant Arg z \leqslant \frac{\pi}{3}$, $Re z \leqslant 1$

Zad.7 Rozwiązać równania ($z \in \mathbb{C}$):

$a)$ $z^2 - 2z + 2 = 0$, $b)$ $z^2 + \sqrt{2}z + (2-2i) = 0$

$c)$ $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$, $d)$ $z^2 + (1+4i)z - (5+i) = 0$,

$e)$ $iz^2 - (i-4)z - (5i-1) = 0$, $f)$ $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$,

$g)$ $z^4 + 9z^2 + 18 = 0$ $h)$ $z^7 + z^4 + z^3 + 1 = 0$,

$g)$ $z^3 - \frac{1-i}{1+i} = 0$,

Zad.8 Wyznacz:

a) $Im\left(\frac{1}{z}\right) + Re(z)$, jeśli $z = 1 - 3i$,

b) $Im\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{2|z|}{Re(z)}$, jeśli $z = 4 - 3i$,

c) $Im((iz)^2)$, jeśli $z = 2 + i$.

Uwaga: Wzór Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Literatura:

- K.T. Jankowscy, Zadania z matematyki wyższej,
- E. Mieloszyk Liczby zespolone,
- T.Jurlewicz, Z.Skoczylas Algebra liniowa 1