1. Zbadać zbieżność całek:

$$a)\ \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx,\quad b)\ \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,dx,\quad c)\ \int_{2}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx,\quad d)\ \int_{-\infty}^{0} x\cdot e^x\,dx,\quad e)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx,$$

$$f)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx,\quad g)\ \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx,\quad h)\ \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx,\quad i)\ \int_{0}^{+\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}\,dx,\quad j)\ \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(3+x)\sqrt{x}}\,dx$$

$$k)\ \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx,\quad l)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^4+1}dx,\quad m)\ \int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} x\cos x^2\,dx$$

2. Zbadaj zbieżność całek:

$$a)\ \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx,\quad b)\ \int_{0}^{1} \ln x\,dx,\quad c)\ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\quad d)\ \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx,\quad e)\ \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$f)\ \int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx,\quad g)\ \int_{0}^{1} \frac{x}{x^2-1}dx,\quad h)\ \int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{x}}dx,\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}dx.$$

3. Obliczyć pole obszaru płaskiego ograniczonego liniami:

$a)\ y=x^2-2x,\ y=3x,$ $\quad b)\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ y=2-x,$ $\quad c)\ y=\frac{1}{x^2},\ y=x,\ y=4,\ (dla\ x>0),$

$d)\ y^2=4x,\ y=4-2x$ $\quad e)\ y=\ln x,\ y=-x+1,\ x=e,$ $\quad f)\ y=\ln x,\ y=-x+1,\ y=e,$

$g)\ y=x^2+1,\ y=-x+3,\ y=1,$ $\quad h)\ y=\sin x,\ y=\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}.$

4. Za pomocą całki oznaczonej oblicz pole obszaru płaskiego ograniczonego wykresami podanych funkcji

(a) $y=x^2$, $y=2x$,

(b) $y=x^2+1$, $y=3-x$,

(c) $y=x^2$, $y=8-x^2$,

(d) $y=1-x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$,

(e) $xy=4$, $y=4x$, $y=\frac{x}{4}$ (dla $x>0$, $y>0$),

(f) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=x$, $y=4$ znajdującego się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych,

(g) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=2$,

(h) $y=x^3-x^2-x$, $y=x$,

(i) $y=\ln x$, $y=1$, $x=2e$,

(j) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$,

5. Obliczyć pole obszaru płaskiego zawartego pomiędzy wykresami:

$$a)\ y=e^{-2x},\ y=0,\ dla\ x\geqslant 0\quad b)\ y=\tfrac{1}{x^2+1},\ y=0,\quad c)\ y=\tfrac{5}{x^2+4},\ y=\tfrac{2}{x^2+4},$$

6. Zinterpretować geometrycznie i obliczyć całki:

$$a)\ \int_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\,dx,\quad b)\ \int_{0}^{4} \sqrt{4x-x^2}\,dx,\quad c)\ \int_{0}^{4} (8-2x)\,dx,$$

$$d)\ \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,\quad e)\ \int_{0}^{1} |\ln x|\,dx,\quad f*)\ \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

7. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu dookoła osi Ox podanych krzywych:

$$a)\ y=\cos x,\ -\tfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \tfrac{\pi}{2},\quad b)\ y=\tfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+18}},\ x\geqslant 0,\quad c*)\ y=\begin{cases} \arccos x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases},$$

$d*)\ y=\frac{\sqrt{x^3}}{x^4+1},\ x\geqslant 0,$ $\quad e*)\ y=\frac{\sqrt{\ln x}}{x},\ x\geqslant 1,$ $\quad f)\ y=\sqrt{4-x^2},\ y=0\ dla\ x\in[-2,2],$

$g)\ \ y=\ln x,\ y=0,\ x=e,$ $\quad h)\ y=x^2,\ y=\sqrt{x},$ $\quad i)\ \ y=\ln x^2,\ y=\ln x,\ x=1,\ x=e.$

8. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywej:

$$a)\ y=\sqrt{2x},\ x\in\langle 0,12\rangle,\quad b)\ y=x^3,\ x\in\langle -1,1\rangle,\quad c)\ y=6x\ dla\ x\in[0,1].$$

9. Wyprowadzić wzór na pole powierzchni sfery o promieniu R.

10. Obliczyć długość łuku krzywej:

$a)\ y=\sqrt{1-x^2},\ x\in\langle 0,\frac{1}{2}\rangle,$

$b)\ y=(4-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}},\ x\in\langle 1,8\rangle,$

$c)\ y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x},$

$d)\ y=\ln\frac{1}{\sin x},\ x\in\langle\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\rangle,$

$e)\ y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3},\ x\in\langle a,b\rangle,\ a=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x),\ b=\displaystyle\int_{-\infty}^{0}2\cdot e^x\,dx.$

Literatura: K.T. Jankowscy " Zbiór zadań z matematyki"

E.Mieloszyk " Matematyka"