

**Zadanie 1.** Podaj przykład macierzy:

- prostokątnej  $3 \times 4$ ,
- kwadratowej stopnia 4 ( $4 \times 4$ ),
- macierzy trójkątnej górnej  $3 \times 3$  i  $4 \times 4$
- macierzy trójkątnej dolnej  $3 \times 3$
- diagonalnej  $5 \times 5$
- jednostkowej  $4 \times 4$

**Zadanie 2.** Sprawdź, czy podane macierze są równe

- $A = \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ,
- $A = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} i^7 \\ (1-i)^2 + 2i \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & i^2 - 1 \\ i^3 & 10 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

**Zadanie 3.** Niech:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Wyznacz podane macierze, o ile działanie jest wykonalne: a)  $A + 2B$ , b)  $2A - C$ , c)  $A \cdot C$ , d)  $C \cdot A$ , e)  $A \cdot B^T$ , f)  $(A + C^T) \cdot B^T$ , g)  $A^T \cdot (B + C)$ , h)  $A \cdot x - 5y$ , i)  $y^T \cdot A$ , j)  $x^T \cdot C$ , k)  $y^T \cdot A \cdot x$ , l)  $A \cdot x \cdot y^T$ , m)  $A \cdot A^T$ , n)  $x \cdot x^T$ , o)  $x^T \cdot x$

**Zadanie 4.** Niech:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, Q = [2 \ 3 \ 1 \ 4], R = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Wyznacz:

- |                       |                        |                |                            |                  |                  |
|-----------------------|------------------------|----------------|----------------------------|------------------|------------------|
| a) $3A + B$           | b) $(B^T - 2C)^T$      | c) $5D + F^T$  | d) $C \cdot E$             | e) $A \cdot I_2$ | f) $A \cdot B$   |
| g) $B \cdot A$        | h) $A \cdot B \cdot C$ | i) $A^2 + A^3$ | j) $A \cdot C + B \cdot C$ | k) $F^T \cdot H$ | l) $I_3 \cdot D$ |
| m) $E \cdot F + A^2$  | n) $I_2^9$             | o) $E \cdot G$ | p) $H \cdot J - J \cdot H$ | q) $G \cdot M$   | r) $K \cdot M^T$ |
| s) $(A - 2C) \cdot D$ | t) $N \cdot P$         | u) $R \cdot N$ | v) $R^2 + R^4$             | w) $P \cdot Q$   | x) $Q \cdot P$   |

**Zadanie 5.** Oblicz

$$(a) (2 + 3i) \cdot \begin{bmatrix} 2 - 3i & 7 - 6i \\ 8 + i & 1 + 3i \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 - i \\ 3 + 2i \end{bmatrix} - (4 + i) \cdot \begin{bmatrix} 1 + i \\ 3 - 2i \end{bmatrix}$$

**Zadanie 6.** Oblicz

$$(a) \begin{bmatrix} 1 - i & i \\ 2 + i & 3 - 2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2i & 3 + 2i \\ 4 + 2i & 5 - 3i \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 - i & 1 + i \\ 3 + 2i & 3 - 2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 + i & 3i \\ -2i & 6 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 7.** Oblicz podane wyznaczniki, w przykładach f)–i) zastosuj rozwinięcie Laplace'a:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, c) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}, d) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, e) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix},$$

$$f) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} g) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, h) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$i) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Zadanie 8.** Oblicz  $\begin{vmatrix} i & 0 & -3 \\ 2 & -1 + i & 5 \\ 1 + i & 3i & -2 \end{vmatrix}$

**Zadanie 9.** Oblicz podane wyznaczniki korzystając z własności wyznacznika:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}, c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix},$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, e) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}, f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

**Zadanie 10.** Rozwiąż podane równania

$$a) \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x - 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}, b) \begin{vmatrix} 4 \sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0.$$

**Zadanie 11.** Rozwiąż podane nierówności

$$a) \begin{vmatrix} 2x - 2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5, b) \begin{vmatrix} 2 & x + 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

**Zadanie 12.** Dla jakiej wartości parametru  $k$  podana macierz posiada macierz odwrotną ?

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 4k & 5k \\ 1 & 2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2k & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} k-3 & 2 & 0 \\ 2 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 13.** Wyznacz macierz odwrotną do podanej macierzy  $A$  i sprawdź wynik

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } A = \text{diag} [ 2 \ 3 \ 1 \ -5 ]$$

**Zadanie 14.** Wyznacz macierz  $X$  z równania

a)  $A \cdot X = B$ , b)  $X \cdot A = B$ , dla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)  $A \cdot X + 2X = B$ , dla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

d)

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^2 + X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e)  $AX + 2X = B$ , dla

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 15.** Wyznacz macierz  $X$  z równania:

$$\text{a) } A \cdot X \cdot (40B)^{-1} = (A^{-1} \cdot B)^{-1}, \text{ dla } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } (B \cdot A^{-1} \cdot X)^{-1} = \frac{1}{3}(A \cdot B)^{-1}, \text{ dla } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } X^{-1} \cdot A = \frac{1}{2}A \cdot B^{-1}, \text{ dla}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 16.** Wyznacz macierz  $X$  z równania, przy założeniu, że wszystkie macierze są nieosobliwe tego samego stopnia

$$\text{(a) } 2C^T \cdot X^{-1} \cdot D^{-1} = 3C,$$

$$\text{(b) } (3B \cdot A)^{-1} \cdot B \cdot X = B,$$

$$\text{(c) } 2A \cdot X^{-1} \cdot B = -B \cdot A,$$

$$\text{(d) } 3A^{-1} \cdot B \cdot X^T \cdot A = A \cdot B^{-1}.$$

**Zadanie 17.** Rozwiąż podane układy równań korzystając ze wzorów Cramera. W przykładzie e), f) wyznacz tylko niewiadomą  $z$ .

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + 5y + 8z = 36 \\ -x - y = -4 \end{cases}, \text{ b) } \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x - 10y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}, \text{ c) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}, \text{ e) } \begin{cases} 2x + 5y - 3z + t = -11 \\ 5x + 10y - 2z - 3t = -3 \\ x + y + z + t = 0 \\ -2x + y - z - 2t = -1 \end{cases}, \text{ f) } \begin{cases} 2x + y - z + t = 5 \\ x + y + z - 2t = -1 \\ x - 2y + z + t = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}.$$

**Zadanie 18.** Dla jakiej wartości parametru  $k$  podany układ jednorodny ma a) jedno rozwiązanie, b) rozwiązanie niezerowe? 
$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ y + 2z = 0 \\ kx + 2y + z = 0 \end{cases}$$

**Zadanie 19.** Rozwiąż układy a), b) z Zadania 17 korzystając z metody macierzy odwrotnej.

**Zadanie 20.** Rozwiąż układy z Zadania 17 korzystając z metody eliminacji Gaussa.

**Zadanie 21.** Wyznacz rząd macierzy:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 9 & 7 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 22.** Korzystając z tw. Kroneckera - Capellego sprawdź, czy podane układy mają rozwiązanie. Jeśli tak, wyznacz je.

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}, \text{ b) } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \text{ c) } \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + 7y + 5z = 1 \\ 2x - 2y + 6z = -5 \end{cases},$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 3x - y - z = 1 \\ 5x - 2y + z = 2 \end{cases}, \text{ e) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}, \text{ f) } \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \end{cases},$$

$$\text{g) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -1 \end{cases}, \text{ h) } \begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ y + 3z - 3t = 1 \\ x + y + z - t = 1 \end{cases}, \text{ i) } \begin{cases} 2x - 3y + z - 5t = 1 \\ x + 2y - 3z + 7t = 2 \\ 3x - y - 2z + 2t = 4 \end{cases},$$

$$\text{j) } \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \\ 5x - 3y + 4z = 4 \end{cases}, \text{ k) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 6x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 10 \end{cases}$$

Sources:

- Linear algebra, T. Jankowski, Wyd. PG, 2001.
- Zbiór zadań z matematyki, K.T. Jankowscy, Wyd. PG, 1998.
- Algebra liniowa, J. Toppp, Wyd. PG, 2005.